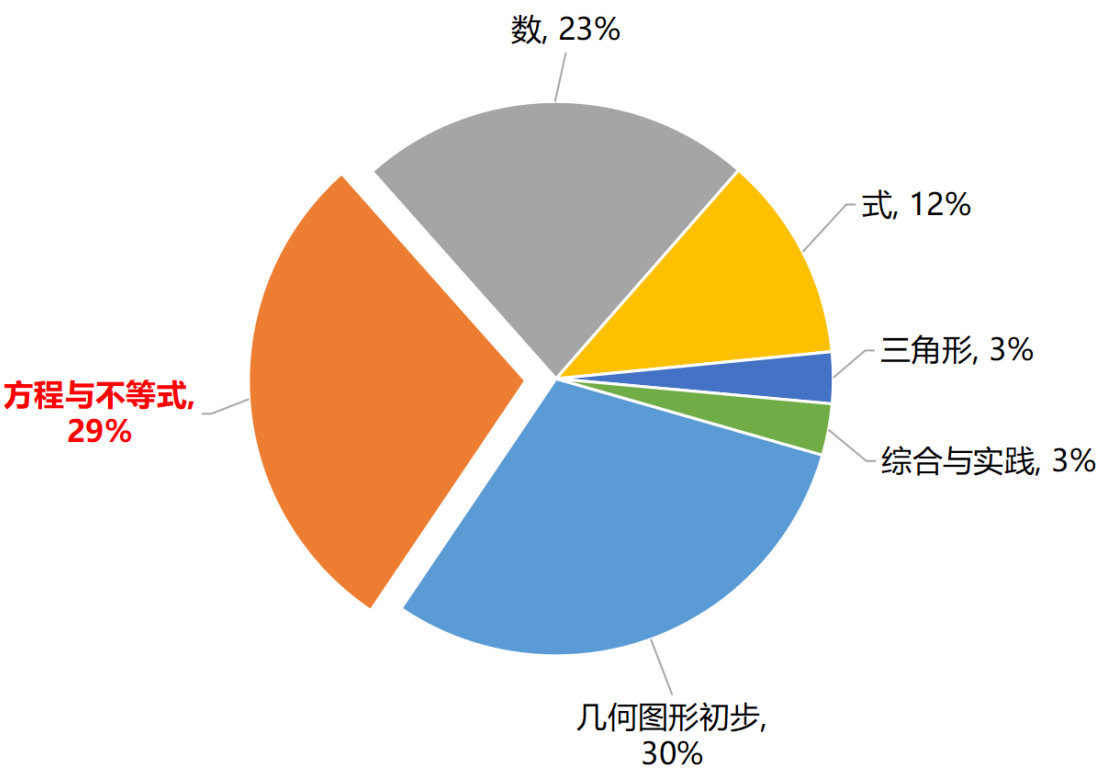


第一讲 一元一次方程的解法



知己知彼

知识点	难度	考频
一元一次方程的概念、解法	★★★	中
一元一次方程的实际应用（一）	★★★★	高
一元一次方程的实际应用（二）	★★★★	高

一、等式

	定义	举例
等式	用____连接的式子	
等式的分类	①____ ②____ ③____	
等式的性质1	等式两边____(或____)同一个数 (或式子), 结果仍相等. 若 $a = b$, 则 $a \pm c$ ____ $b \pm c$	
等式的性质2	等式两边____同一个数, 或 ____同一个不为0的数或式子, 结果仍相等. 若 $a = b$, 则 ac ____ bc , $\frac{a}{c}$ ____ $\frac{b}{c}$ (c 不为0)	
方程	含有____的等式称为方程。	

【备注】一、等式

1.定义：用**等号**连接的式子叫做等式。

2.等式的类型

恒等式：无论用什么数值代替等式中的字母，等式总能成立。

例： $x = x$, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 。

条件等式：只有用某些数值代替等式中的字母，等式才能成立。

例：方程 $x + 5 = 6$ 需要 $x = 1$ 才能成立。

矛盾等式：无论用什么数值代替等式中的字母，等式都不能成立。

例： $3 = 2$, $x + 1 = x - 1$ 等。

3.等式的性质

等式性质1：

等式两边**加（或减）**同一个数（或式子），结果仍相等。

如果 $a = b$ ，那么 $a \pm c = b \pm c$ 。例子 $a = b$ ，则 $a \pm 1 = b \pm 1$

等式性质2：

等式两边**乘**同一个数，或**除以**同一个不为0的数，结果仍相等。

如果 $a = b$ ，那么 $ac = bc$ ；例子： $a = b$ ，则 $3a = 3b$

如果 $a = b$ ($c \neq 0$)，那么 $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ ；例子 $a = b$ ，则 $\frac{a}{3} = \frac{b}{3}$

栗子1

1. 在 $a - (b - c) = a - b + c$, $4 + x = 9$, $C = 2\pi r$, $3x + 2y$ 中, 等式的个数为().
- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

【答案】C

【解析】 $3x + 2y$ 没有等号, 不是等式, 其他三个均是等式, 故选C.

【标注】【知识点】单项式的定义

2. 下列各式中, 哪些是等式?

① $3a + 4$; ② $x + 2y = 8$; ③ $5 - 3 = 2$; ④ $x - 1 > y$; ⑤ $6x - x - 1$; ⑥ $-\frac{8}{x} = 3$; ⑦ $3y^2 + y = 0$; ⑧ $2a^2 - 3a^2$; ⑨ $3a < -2a$.

【答案】②③⑥⑦

【解析】② $x + 2y = 8$; ③ $5 - 3 = 2$; ⑥ $-\frac{8}{x} = 3$; ⑦ $3y^2 + y = 0$ 为等式

【标注】【知识点】方程的定义

栗子2

3. 下列等式变形错误的是().

A. 若 $a = b$, 则 $\frac{a}{1+x^2} = \frac{b}{1+x^2}$

B. 若 $a = b$, 则 $3a = 3b$

C. 若 $a = b$, 则 $ax = bx$

D. 若 $a = b$, 则 $\frac{a}{m} = \frac{b}{m}$

【答案】D

【解析】根据等式的基本性质, 等式左右两边同时乘相同的数, 等式依然成立; 等式左右两边同时除以不是0的数, 等式依然成立.

A. $\because 1 + x^2 \geq 1$,

$\therefore$ 若 $a = b$, 则 $\frac{a}{1+x^2} = \frac{b}{1+x^2}$, 故A正确;

B. 根据等式基本性质, 若 $a = b$, 则 $3a = 3b$, 故B正确;

C. 根据等式基本性质, 若 $a = b$, 则 $ax = bx$, 故C正确;

D. 当 $m = 0$ 时, $\frac{a}{m} = \frac{b}{m}$ 不成立, 故D错误.

故选D.

【标注】【知识点】判断等式变形是否正确

4. 下列等式变形错误的是().

A. 若 $x - 1 = 3$, 则 $x = 4$

B. 若 $\frac{1}{2}x - 1 = x$, 则 $x - 2 = 2x$

C. 若 $mx = my$, 则 $x = y$

D. 若 $x - 3 = y - 3$, 则 $x - y = 0$

【答案】C

【解析】C项, 若 $mx = my$, $m = 0$; 推不出 $x = y$, C项错误;

A,B,D都符合等式的性质, 正确.

【标注】【知识点】等式性质2

5. 下列结论错误的是().

A. 若 $a = b$, 则 $\frac{a}{m^2 + 2} = \frac{b}{m^2 + 2}$

B. 若 $\frac{a}{m - 1} = \frac{b}{m - 1}$, 则 $a = b$

C. 若 $x = 3$, 则 $x^2 = 3x$

D. 若 $ax + 2 = bx + 2$, 则 $a = b$

【答案】D

【解析】A选项: 在等式 $a = b$ 的两边同时除以不为零的 $(m^2 + 2)$ 代数式, 等式仍成立, 故本选项不符合题意.

B选项: 在等式 $\frac{a}{m - 1} = \frac{b}{m - 1}$ 的两边同时乘以 $(m - 1)$, 等式仍成立, 故本选项不符合题意.

C选项: 在等式 $x = 3$ 的两边同时乘以 $(m - 1)$, 等式仍成立, 故本选项不符合题意.

D选项: 当 $x = 0$ 时, $a = b$ 不一定成立, 故本选项符合题意.

故选D.

【标注】【知识点】判断等式变形是否正确

二、一元一次方程

	定义	举例
方程	含有_____的等式称为方程。	
一元一次方程	只含有____未知数（元），未知数的次数都是____，等号两边都是____，这样的方程叫做一元一次方程。	
解一元一次方程	①去分母：在方程的两边同乘各分母的_____。 ②去括号：先去____，再去____，最后去____ ③移项：把等式的某项_____后移到另一边，叫做移项。 ④合并同类项：把方程化为_____的形式。 ⑤系数化为1：在方程的两边都除以未知数的_____。	

【备注】一、方程

1.定义：含有**未知数**的等式叫做方程。

① 必须有等号；② 必须有未知数。例子： $y^2 + 1 = 2y$ 、 $x + 5 = 5x + 1$ 。

【注意】方程是等式，但等式不一定是方程；比如， $1 + 2 = 3$ 是等式、但不是方程。

二、一元一次方程

1、定义：方程中只含有**一个**未知数(元)，未知数的次数都是**1**，等号两边都是**整式**，这样的方程叫做一元一次方程。

2、解一元一次方程

①去分母：在方程的两边同乘各分母的**最小公倍数**。

②去括号：先去**小括号**，再去**中括号**，最后去**大括号**

③移项：把等式的某项**变号**后移到另一边，叫做移项。

④合并同类项：把方程化为 **$ax = b(a \neq 0)$** 的形式

⑤在方程的两边都除以未知数的**系数** a ，得到方程的解 **$x = \frac{b}{a}$**

1. 方程与一元一次方程

6. 下列式子

① $2x + y = 0$; ② $2 + 4 = 6$; ③ $1 + \frac{1}{x} = x$; ④ $t^2 - 3t + 2 = 0$; ⑤ $3x + y = 3x + 5$; ⑥ $5 + x = 10$; ⑦ $2|x| = 3$; ⑧ $ax = b$ (a, b 为已知数) ; ⑨ $x^2 - x + 3 = 5 + x^2$; ⑩ $-x + 3 = 5 - 2 - x$ 中, 方程有 _____ 个.

【答案】 9

【标注】【知识点】方程的定义

栗子4

7. 在下列方程中: ① $x + 2y = 3$, ② $\frac{1}{x} - 3x = 9$, ③ $\frac{y-2}{3} = y + \frac{1}{3}$, ④ $\frac{1}{2}x = 0$, 是一元一次方程的有 _____ (只填序号).

【答案】 ③④

【解析】 ①是二元一次方程;

②是分式方程;

③符合一元一次方程的定义;

④符合一元一次方程的定义,

故③④是一元一次方程.

【标注】【知识点】一元一次方程的定义

8. 下列方程① $2x = 3$; ② $\frac{2x+3}{5} = \frac{x}{4}$, ③ $2(x+1) + 3 = \frac{1}{x}$; ④ $3(2x+5) - 2(x-1) = 4x+6$, 一元一次方程共有 () 个.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】 B

【解析】 ①是一元一次方程;

②是一元一次方程;

③不是一元一次方程, 是分式方程,

④不是一元一次方程, $3(2x+5) - 2(x-1) = 4x+6$ 化简得

$6x + 15 - 2x + 2 = 4x + 6$

$15 + 2 = 6$, 不含未知数, 所以不是.

故选B .

【标注】【知识点】一元一次方程的定义

栗子5

9. 已知 $(m^2 - 1)x^2 - (m - 1)x + 8 = 0$ 是关于 x 的一元一次方程, 则 m 的值为 _____ .

【答案】 -1

【解析】标准形式: 方程 $ax + b = 0$ ($a \neq 0$, a, b 是已知数) 的形式叫一元一次方程的标准形式 .

$m^2 - 1 = 0$ m 等于正负1 $m - 1$ 不等于0, 所以 $m = -1$.

【标注】【知识点】由一元一次方程的定义求参数的值

2. 解一元一次方程

栗子6

10. 下面方程变形中, 正确的是 () .

- A. $2x - 1 = x + 5$ 移项得 $2x + x = 5 + 1$
- B. $3(x - 2) + 2(x + 3) = 1$ 去括号得 $3x - 6 + 2x + 3 = 1$
- C. $(x + 2) - 2(x - 1) = 0$ 去括号得 $x + 2 - 2x + 2 = 0$
- D. $-4x = 2$ 系数化为“1”得 $x = -2$

【答案】 C

【解析】 $2x - 1 = x + 5$ 移项得: $2x - x = 5 + 1$, 故A错;

$3(x - 2) + 2(x + 3) = 1$ 去括号得: $3x - 6 + 2x + 6 = 1$, 故B错;

$(x + 2) - 2(x - 1) = 0$ 去括号得: $x + 2 - 2x + 2 = 0$, 故C正确;

$-4x = 2$ 系数化为“1”得: $x = -\frac{1}{2}$, 故D错,

∴答案选C .

【标注】【知识点】解一元一次方程的一般步骤

11. 把方程 $\frac{x}{2} - \frac{x-1}{6} = 1$ 去分母, 正确的是 () .

A. $3x - (x - 1) = 1$ B. $3x - x - 1 = 1$ C. $3x - x - 1 = 6$ D. $3x - (x - 1) = 6$

【答案】 D

【解析】 方程 $\frac{x}{2} - \frac{x-1}{6} = 1$ 左右两边同时乘以6得，
 $3x - (x - 1) = 6$.

【标注】 【知识点】解一元一次方程的一般步骤

栗子7

12. 解方程： $3x + 3 = 8 - 12x$.

【答案】 $x = \frac{1}{3}$.

【解析】 $3x + 3 = 8 - 12x$,
 移项合并得 $15x = 5$,
 系数化为1得 $x = \frac{1}{3}$.

【标注】 【知识点】常规一元一次方程解法

栗子8

13. 解方程： $4x - 3(5 - x) = 6$.

【答案】 $x = 3$.

【解析】 $4x - 15 + 3x = 6$,
 $4x + 3x = 6 + 15$,
 $7x = 21$,
 $x = 3$.

【标注】 【知识点】常规一元一次方程解法

14. 解方程：

(1) $2(x + 3) - 7 = x - 5(2x - 1)$.

【答案】(1) $x = \frac{6}{11}$.

【解析】(1) $2(x+3)-7=x-5(2x-1)$.

去括号, 得 $2x+6-7=x-10x+5$,

移项, 合并同类项, 得: $11x=6$,

系数化1, 得: $x = \frac{6}{11}$.

【标注】【知识点】常规一元一次方程解法

栗子9

15. 解方程 $2x + \frac{x-1}{3} = 2 - \frac{3x-1}{2}$, 去分母, 得().

A. $12x + 2(x-1) = 12 + 3(3x-1)$

B. $12x + 2(x-1) = 12 - 3(3x-1)$

C. $6x + (x-1) = 4 - (3x-1)$

D. $12x - 2(x-1) = 12 - 3(3x-1)$

【答案】B

【解析】去分母每一项都乘6, 得 $12x + 2(x-1) = 12 - 3(3x-1)$,

故选B.

【标注】【知识点】解一元一次方程的一般步骤

16. 解方程: $x + \frac{2(x-3)}{3} = 6 - \frac{x-7}{6}$.

【答案】 $x = 5$.

【解析】去分母得: $6x + 4(x-3) = 36 - (x-7)$,

去括号得: $6x + 4x - 12 = 36 - x + 7$,

移项得: $6x + 4x + x = 36 + 7 + 12$,

合并得: $11x = 55$,

系数化为1得: $x = 5$.

【标注】【知识点】常规一元一次方程解法

栗子10

17. 把方程 $\frac{x+1}{0.4} - \frac{0.2x-1}{0.7} = 1$ 中分母化为整数, 其结果应为().

$$\begin{aligned} \text{A. } & \frac{10x+1}{4} - \frac{2x-1}{7} = 1 \\ \text{C. } & \frac{10x+1}{4} - \frac{2x-1}{7} = 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{B. } & \frac{10x+10}{4} - \frac{2x-10}{7} = 1 \\ \text{D. } & \frac{10x+10}{4} - \frac{2x-10}{7} = 10 \end{aligned}$$

【答案】 B

【解析】 方程整理得： $\frac{10x+10}{4} - \frac{2x-10}{7} = 1$.
故选B.

【标注】【知识点】解一元一次方程的一般步骤

18. 解方程： $\frac{0.1x-0.4}{1.2} - 1 = \frac{0.2x+1}{0.3}$.

【答案】 $x = -8$.

【解析】 原方程可化为 $\frac{x-4}{12} - 1 = \frac{2x+10}{3}$,
去分母得 $x-4-12=4(2x+10)$,
去括号得 $x-16=8x+40$,
移项, 合并同类项得 $-7x=56$,
系数化为1, 得 $x=-8$.

【标注】【知识点】解含小数的一元一次方程

19. 解方程： $\frac{0.4x+0.9}{0.5} - \frac{0.03+0.02x}{0.03} = \frac{x-5}{2}$.

【答案】 9

【解析】 原方程变形可得： $\frac{4x+9}{5} - \frac{3+2x}{3} = \frac{x-5}{2}$
去分母, 得： $6(4x+9) - 10(3+2x) = 15(x-5)$
去括号, 得： $24x+54-30-20x=15x-75$
移项, 得： $24x-20x-15x=-75+30-54$
合并同类项, 得： $-11x=-99$
系数化为1, 得： $x=9$

【标注】【知识点】解含小数的一元一次方程